$$^{0}A_{3} = {}^{0}A_{1}({}^{1}A_{2})({}^{2}A_{3})$$

Cuando se consideran todos los grados de libertad, a la matriz $^{0}A_{n}$ se le suele denominar T. Así, dado un robot de seis grados de libertad, se tiene que la posición y orientación del eslabón final vendrá dada por la matriz T:

$$T = {}^{0}A_{6} = {}^{0}A_{1}({}^{1}A_{2})({}^{2}A_{3})({}^{3}A_{4})({}^{4a}{}_{5})({}^{5}A_{6})$$

Aunque para descubrir la relación que existe entre dos elementos contiguos se puede hacer uso de cualquier sistema de referencia ligado a cada elemento, la forma habitual que se suele utilizar en robótica es la representación de Denavit-Hartenberg.(4)

Algoritmo de Denavit- Hartenberg para la obtención del modelo

Denavit-Hartenberg propusieron en 1955 un método matricial que permite establecer de manera sistemática un sistema de coordenadas (Si) ligado a cada eslabón i de una cadena articulada, pudiéndose determinar a continuación las ecuaciones cinemáticas de la cadena completa.

Según la representación D-H, escogiendo adecuadamente los sistemas de coordenadas asociados para cada eslabón, será posible pasar de uno al siguiente mediante 4 transformaciones básicas que dependen exclusivamente de las características geométricas del eslabón.

Estas transformaciones básicas consisten en una sucesión de rotaciones y traslaciones que permitan relacionar el sistema de referencia del elemento i con el sistema del elemento i-1. Las transformaciones en cuestión son las siguientes:

Rotación alrededor del eje Z_{i-1} un ángulo q_i.
Traslación a lo largo de Z_{i-1} una distancia d_i; vector di (0,0,d_i).
Traslación a lo largo de X_i una distancia a_i; vector ai (0,0,a_i).
Rotación alrededor del eje X_i, un ángulo a_i.

Dado que el producto de matrices no es conmutativo, las transformaciones se han de realizar en el orden indicado. De este modo se tiene que:

$$^{i-1}A_{i} = T(z, qi)\, T(0,0,di)\, T(ai,0,0)\, T(x,ai)$$

Y realizando el producto de matrices:

$$^{i-1}A_{1} = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\alpha_i & aC\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & aS\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Donde q_i, a_i, d_i, a_i, son los parámetros **D-H** del eslabón i. De este modo, basta con identificar los parámetros q_i, a_i, d_i, a_i, para obtener matrices A y relacionar así todos y cada uno de los eslabones del robot.*

Como se ha indicado, para que la matriz $^{i-1}A_i$, relacione los sistemas (S_i) y (S_{i-1}), es necesario que los sistemas se hayan escogido de acuerdo a unas determinadas normas. Estas, junto con la definición de los 4 parámetros de Denavit-Hartenberg, conforman el siguiente algoritmo para la resolución del problema cinemático directo:

***DH1.** Numerar los eslabones comenzando con 1 (primer eslabón móvil dela cadena) y acabando con n (último eslabón móvil). Se numerará como eslabón 0 a la base fija del robot.*

***DH2.** Numerar cada articulación comenzando por 1 (la correspondiente al primer grado de libertad y acabando en n).*

***DH3.** Localizar el eje de cada articulación. Si esta es rotativa, el eje será su propio eje de giro. Si es prismática, será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.*

***DH4.** Para i de 0 a n-1, situar el eje Zi, sobre el eje de la articulación i+1.*

***DH5.** Situar el origen del sistema de la base (S0) en cualquier punto del eje Z0. Los ejes X0 e Y0 se situaran dé modo que formen un sistema dextrógiro con Z0.*

***DH6.** Para i de 1 a n-1, situar el sistema (Si) (solidario al eslabón i) en la intersección del eje Zi con la línea normal común a Zi-1 y Zi. Si ambos ejes se cortasen se situaría (Si) en el punto de corte. Si fuesen paralelos (Si) se situaría en la articulación i+1.*

***DH7.** Situar Xi en la línea normal común a Zi-1 y Zi.*

***DH8.** Situar Yi de modo que forme un sistema dextrógiro con Xi y Zi.*

***DH9.** Situar el sistema (Sn) en el extremo del robot de modo que Zn coincida con la dirección de Zn-1 y Xn sea normal a Zn-1 y Zn.*

***DH10.** Obtener Øi como el ángulo que hay que girar en torno a Zi-1 para que Xi-1 y Xi queden paralelos.*

***DH11.** Obtener Di como la distancia, medida a lo largo de Zi-1, que habría que desplazar (Si-1) para que Xi y Xi-1 quedasen alineados.*

***DH12.** Obtener Ai como la distancia medida a lo largo de Xi (que ahora coincidiría con Xi-1) que habría que desplazar el nuevo (Si-1) para que su origen coincidiese con (Si).*

***DH13.** Obtener ai como el ángulo que habría que girar entorno a Xi (que ahora coincidiría con Xi-1), para que el nuevo (Si-1) coincidiese totalmente con (Si).*

DH14. *Obtener las matrices de transformación i-1Ai.*
DH15. *Obtener la matriz de transformación que relaciona el sistema de la base con el del extremo del robot T = 0Ai, 1A2... n-1An.*
DH16. *La matriz T define la orientación (submatriz de rotación) y posición (submatriz de traslación) del extremo referido a la base en función de las n coordenadas articulares.*

Parametros DH para un eslabón giratorio.

Los cuatro parámetros de DH (qi, di, ai, ai) dependen únicamente de las características geométricas de cada eslabón y de las articulaciones que le unen con el anterior y siguiente (fig: # 1)

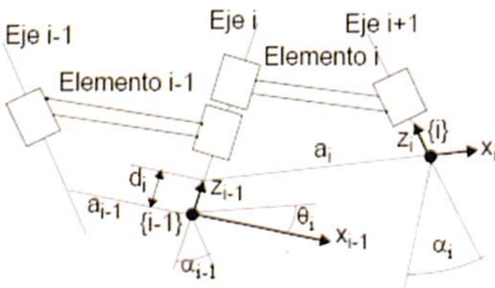


Fig # 1
Ubicación de parámetros D-H

q_i Es el ángulo que forman los ejes X_{i-1} y X_i medido en un plano perpendicular al eje Z_{i-1}, utilizando la regla de la mano derecha. Se trata de un parámetro variable en articulaciones giratorias.

d_i Es la distancia a lo largo del eje Z_{i-1} desde el origen del sistema de coordenadas (i-1)-esimo hasta la intersección del eje Z_{i-1} con el eje X_i. Se trata de un parámetro variable en articulaciones prismáticas.

ai Es a la distancia a lo largo del eje X_i que va desde la intersección del eje Z_{i-1} con el eje X_i hasta el origen del sistema i-esimo, en el caso de articulaciones giratorias. En el caso de articulaciones prismáticas, se calcula como la distancia mas corta entre los ejes Z_{i-1} y Z_i.

a_i Es el ángulo de separación del eje Z_{i-1} y el eje Z_i, medido en un plano perpendicular al eje X_i, utilizando la regla de la mano derecha.

Una vez obtenidos los parámetros DH, el cálculo de las relaciones entre los eslabones consecutivos del robot es inmediato, ya que vienen dadas por las matrices A, que se calcula según la expresión general.
Las relaciones entre eslabones no consecutivos vienen dadas por las matrices T que se obtienen como producto de un conjunto de matrices A.

Obtenida la matriz T, ésta expresará la orientación (submatriz (3x3) de rotación) y posición (submatriz (3x1) de traslación) del extremo del robot en función de sus coordenadas articulares, con lo que quedará resuelto el problema cinemático directo.(5)

$$T = \begin{bmatrix} nx & ox & ax & Px \\ ny & oy & ay & Py \\ nz & oz & az & Pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & o & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde: **n, o** y **a** es una terna que representa la orientación y **p** es un vector que representa la posición.

DESARROLLO

Partiendo de las especificaciones entregadas por el fabricante del robot MOTOMAN de seis grados de libertad, las cuales vienen dadas en forma gráfica y se observan a continuación en la fig. #2, donde se pueden encontrar las dimensiones necesarias.

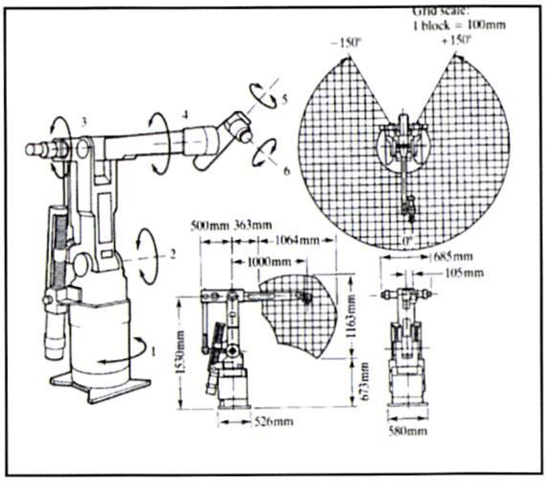


Fig. # 2
Robot manipulador MOTOMAN de seis grados de libertad

Una vez identificadas las dimensiones, se ubican los ejes y sistemas de coordenadas de acuerdo a las reglas del algoritmo de Denavit Hartenberg, esto se puede observar en la figura # 3.

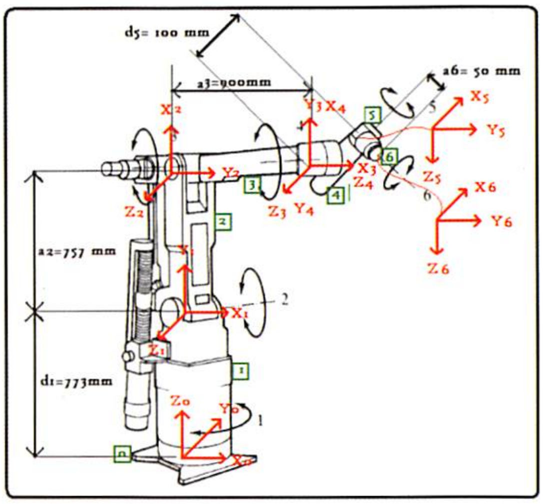


Fig. # 3
Ubicación de sistemas de coordenadas para el robot MOTOMAN

En la figura # 3 se observan las dimensiones del robot, los sistemas de coordenadas, la numeración de cada eslabón (en verde), y la numeración de cada articulación que coincide con la numeración de los ángulos.
Para facilitar el análisis, se realiza una gráfica con los sistemas de coordenadas únicamente, esto se ve en la figura # 4.

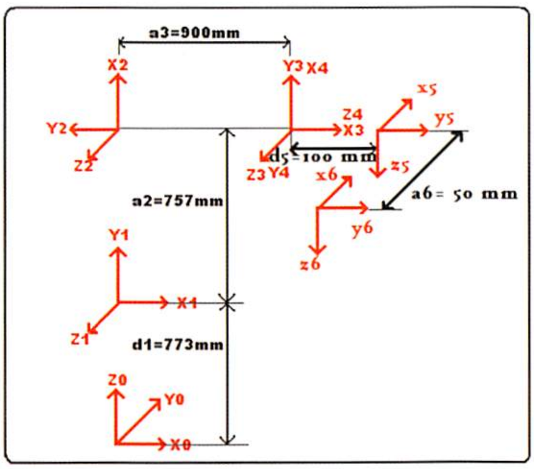


Fig. # 4
Ubicación de sistemas de coordenadas

Los parámetros DH son los siguientes:
Tabla # 1
Parámetros DH del Robot MOTOMAN de seis articulaciones, los ángulos se encuentran en grados, mientras que las dimensiones se encuentran en milímetros.

Articulación	θ	d	a	α
1	θ1	773	0	90
2	θ2	0	757	0
3	θ3	0	900	0
4	θ4	0	0	90
5	θ5	100	0	90
6	θ6	0	-50	0

Las matrices de paso son:
Para i = 1:

$$ {}^{0}A_{1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 773 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Para i =2

$$ {}^{0}A_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 & 757\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_1 & 0 & 757\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Para i = 3

$$ {}^{3}A_4 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) & 0 & \sin(\theta_4) & 0 \\ \sin(\theta_4 + 90) & 0 & -\cos(\theta_4 + 90) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Para i = 4

$$ {}^{4}A_5 = \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & 0 & \sin\theta_5 & 0 \\ \sin\theta_5 & 0 & -\cos\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Para i = 5

$$ {}^{4}A_5 = \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & 0 & \sin\theta_5 & 0 \\ \sin\theta_5 & 0 & -\cos\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Para i = 6

$$ {}^{5}A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -50\cos(\theta_5) \\ 0 & 1 & 0 & -50\cos(\theta_5) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Para obtener la matriz T debemos multiplicar todas las matrices de paso, de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$ T = {}^{0}A_6 = {}^{0}A_1 ({}^{1}A_2)({}^{2}A_3)({}^{3}A_4)({}^{4a}{}_5)({}^{5}A_6) $$

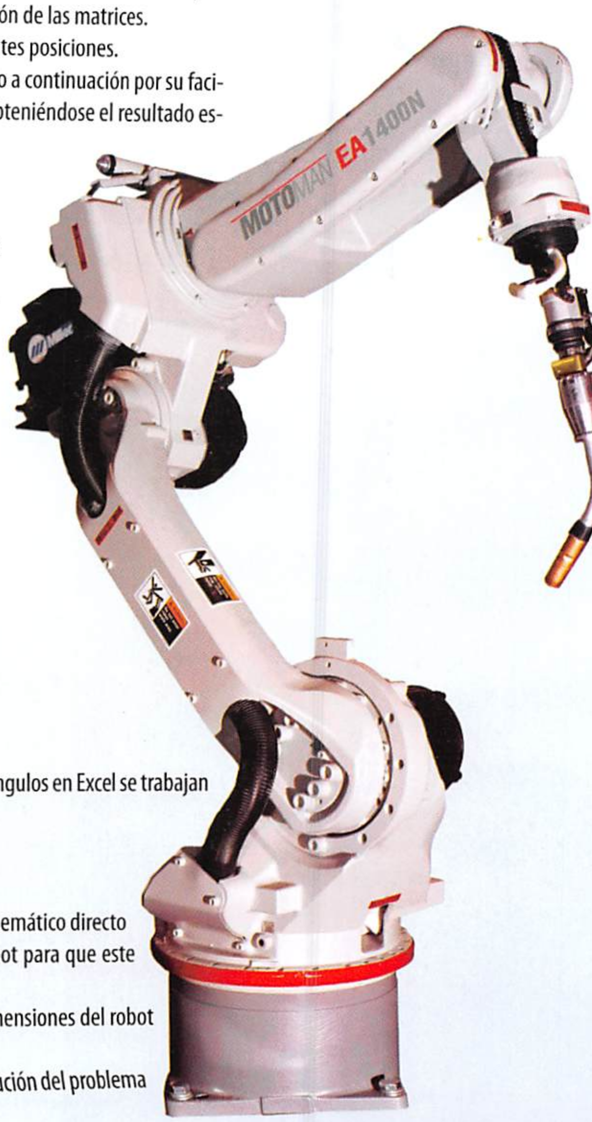
Para resolver esta ecuación se puede recurrir a algún programa como MatLab donde se pueden realizar las multiplicaciones de las matrices por medio de operaciones generales de MatLab, o si se desea se pueden utilizar herramientas especiales que MatLab tiene para robótica y que se las puede bajar de internet.

También es factible utilizar Excel, en este trabajo por facilidad, se prefirió utilizarlo. Mediante ecuaciones se implementaron las fórmulas necesarias y con la instrucción MMULT se realizó la multiplicación de las matrices.
Se dejó los parámetros DH como valores que se los puede cambiar para probar diferentes posiciones.
Para comprobar la validez del trabajo realizado, se hicieron varias pruebas, presentando a continuación por su facilidad de entender, la prueba que resulta al colocar el robot completamente estirado, obteniéndose el resultado esperado.
Los valores que el robot requiere para estar completamente estirado son:

Ángulo	Valor en grados
1	0
2	90
3	90
4	0
5	0
6	0

Y se obtiene el siguiente resultado para la matriz T:

$$ T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 51 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2.530 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$



Donde la matriz 3x3 nos da la orientación, mientras que la posición es:

px =	51 mm
py =	1 mm
pz =	2530 mm

Los valores reales deberían ser:

px =	50 mm
py =	0 mm
pz =	2530 mm

Como se puede observar la diferencia es mínima y es justificable pues los valores de los ángulos en Excel se trabajan en radianes, y para 90 grados se aproximó a 1,57 radianes.

CONCLUSIONES

El modelado cinemático de un robot manipulador permite la solución del problema cinemático directo el cual es una herramienta muy útil al momento de posicionar el efector final del robot para que este pueda realizar tareas de gran precisión.
Para resolver el problema cinemático directo, es necesaria una identificación de las dimensiones del robot y ubicar correctamente los sistemas de coordenadas.
El algoritmo Denavit Hartenberg, permite una solución muy práctica y rápida para la solución del problema

cinemático directo, basta tan solo conocer cuatro parámetros de cada articulación.
Es necesario seguir reglas especificadas en el algoritmo de Denavit hartenberg en especial al colocar los sistemas de coordenadas para conseguir una solución sin errores.
Una vez resuelto el modelo matemático, se lo puede programar en el controlador del robot, para que éste pueda conocer la posición exacta de su efector final, para esto se debe ayudar de sus sensores propioceptivos.

REFERENCIAS

http://es.wikipedia.org/wiki/Cinem%C3%A1tica
http://proton.ucting.udg.mx/robotica/r166/r91/r91.htm
http://proton.ucting.udg.mx/robotica/r166/r79/r79.htm
http://proton.ucting.udg.mx/robotica/r166/r80/r80.htm
http://148.202.12.20/~cin/robotic/tarease/dh/dh.htm
http://www.aurova.ua.es/robolab/EJS4/PRR_Suficiencia_Intro_2.html
http://www.youtube.com/watch?v=nJpr1h-Ysbs
http://proton.ucting.udg.mx/robotica/r166/r81/r81.htm
http://www.angelfire.com/extreme/greynosom/archivos/Cinematica_Robot.pdf

BIBLIOGRAFÍA

ANTONIO BARRIENTOS, LUIS FELIPE PEÑIN, CARLOS BARRAGUER, RAFAEL ARACIL.(2007)
Fundamentos de robótica, Madrid: McGraw-Hill, segunda edición.
ISBN: 978-84-481-5636-7

FERNANDO TORRES, JORGE POMARES, PABLO GIL, SANTIAGO PUENTE, RAFAEL ARACIL.(2002)
Robots y sistemas sensoriales, Madrid: Prentice Hall, segunda edición.
ISBN: 84-205-3574-5

JOHN J. CRAIG (2006)
Robótica, Madrid: Prentice Hall, tercera edición.
ISBN: 970-26-0772-8

ANIBAL OLLERO BATURE (2001)
Robótica, Manipuladores y robots móviles, Barcelona: Alfaomega-Marcombo.
ISBN: 84-267-1313-0